第 28 講　証明(1)

1　n は自然数とする．次の(1)～(4)の不等式をそれぞれ示せ．

(1)　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}<n+2$

(2)　$n+3<\sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$

(3)　$n+3<\sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$

(4)　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　a, b, c, x, y, z を実数とする.

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$　……①　が成り立つことを示せ.

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$　の最小値を求めよ.

[2]　$x \neq 0$ とするとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　x，y は実数とする．$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ であることを示せ．

［2］　不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x，y，z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　証明(1)

［1］ t を 0 でない実数とするとき，$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ は　$t=$ **ア** ，$-$ **イ** のとき最小値 **ウ** をとる．

［2］ a，b，c，x，y，z が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．これを利用して，a，b，c が $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数であるとき，$a+b+c$ の最大値を求める．

(**エ** $^2+$ **オ** $^2+$ **カ** ^{2})$(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ であることより

$(a+b+c)^2\leqq$ **キ** である．

よって，$a=b=c=\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ のとき，$a+b+c$ は最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 28 講　証明(1)

1　n は自然数とする．次の(1)〜(4)の不等式をそれぞれ示せ．

(1)　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}<n+2$

(2)　$n+3<\sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$

(3)　$n+3<\sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$

(4)　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

(1)〜(4)の不等式において，各辺はすべて正である．

(1)　$(n+2)^3-(n+1)(n+2)(n+3)=(n+2)\{(n+2)^2-(n+1)(n+3)\}=n+2>0$

よって　$(n+1)(n+2)(n+3)<(n+2)^3$　より示された．

(2)　$(n+1)(n+4)(n+6)-(n+3)^3$

$=(n^2+5n+4)(n+6)-(n+3)^3$

$=n^3+11n^2+34n+24-(n^3+9n^2+27n+27)$

$=2n^2+7n-3\geqq 2\cdot 1^2+7\cdot 1-3=6>0$

よって　$(n+3)^3<(n+1)(n+4)(n+6)$　より示された．

(3)　$(n+2)(n+3)(n+5)-(n+3)^3$

$=(n+3)\{(n+2)(n+5)-(n+3)^2\}=(n+3)(n+1)\geqq 4\cdot 2=8>0$

よって　$(n+3)^3<(n+2)(n+3)(n+5)$　より示された．

(4)　(2)，(3) より　$(n+3)^2<\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

よって　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

また，(1)において n を $n+3(>0)$ に置き換えると

$\sqrt[3]{(n+4)(n+5)(n+6)}<n+5$　　これと(1)より

$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<(n+2)(n+5)$

ここで　$\left(n+\dfrac{7}{2}\right)^2-(n+2)(n+5)=\dfrac{9}{4}>0$　より

$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<\left(n+\dfrac{7}{2}\right)^2$

よって　$\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

以上より示された．

2　[1]　a，b，c，x，y，z を実数とする．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$　……①　が成り立つことを示せ．

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$　の最小値を求めよ．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$

$\quad-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$

等号成立は　$ay=bx$　かつ　$bz=cy$　かつ　$cx=az$

つまり　$a:b:c=x:y:z$　のとき.

よって示された.

(2)　①で $a=b=c=1$　のとき

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2=1 \qquad \text{よって} \quad x^2+y^2+z^2\geqq\frac{1}{3}$$

等号成立は　$x:y:z=1:1:1$　のとき.

これと　$x+y+z=1$　より　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$　のとき.

したがって求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

---

2 [2]　$x\neq 0$ とするとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

$x>0$ のとき　$k=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$　　よって　$k\geqq 2$

$x<0$ のとき　$-k=-x-\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)}=2$　　よって　$-k\geqq 2$　より　$k\leqq -2$

したがって　$\boldsymbol{k\leqq -2,\ 2\leqq k}$

---

3 [1]　x，y は実数とする．$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ であることを示せ.

$3-(x^2-2x+y^2)=3+2x-(x^2+y^2)$

ここで，$x^2+y^2<1$　のとき　$-(x^2+y^2)>-1$

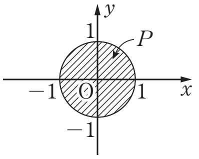
よって　$3+2x-(x^2+y^2)>3+2x-1=2x+2$

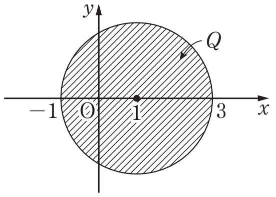
また，$x^2+y^2<1$　のとき　$y^2<1-x^2$　　よって　$1-x^2>0$ より　$-1<x<1$

したがって　$2x+2>2\cdot(-1)+2=0$

ゆえに　$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ である.

【別解】　$x^2+y^2<1$，$(x-1)^2+y^2<4$　が表す領域をそれぞれ P，Q とすると，P，Q の表す領域は右図斜線部分（境界は含まない）.





よって　$P\subset Q$ より

$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ である.

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］　不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x，y，z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$f(x,\ y,\ z)=ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx$$
$$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+(a-1)x^2+(a-1)z^2$$
$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}+(a-1)x^2+(a-1)z^2$$ とおくと

$f(x,\ y,\ z) \geqq 0$　が任意の実数 x，y，z で成り立つのは　$a-1 \geqq 0$　つまり　$a \geqq 1$　のとき．
また，$a<1$ のとき，$f(x,\ y,\ z) \geqq 0$　が成り立たない例として　$x=y=z=1$　が存在する．
よって求める a の範囲は　$\boldsymbol{a \geqq 1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第28講　証明(1)

[1]　t を0でない実数とするとき，$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ は　$t=$ [ア]，$-$[イ] のとき最小値 [ウ] をとる．

$t>0$　のとき　$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$　　よって　$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|\geqq 2$

等号成立は　$t=\dfrac{1}{t}$　$t^2=1$　つまり　$t=\mathbf{1}$　のとき．

$t<0$　のとき　$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=-t-\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{(-t)\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)}=2$　　よって　$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|\geqq 2$

等号成立は　$-t=-\dfrac{1}{t}$　$t^2=1$　つまり　$t=-\mathbf{1}$　のとき．

以上より　$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ の最小値は　$\mathbf{2}$

[2]　$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．これを利用して，$a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数であるとき，$a+b+c$ の最大値を求める．

([エ]$^2+$[オ]$^2+$[カ]^2)$(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ であることより

$(a+b+c)^2\leqq$ [キ] である．

よって，$a=b=c=\dfrac{\sqrt{[ク]}}{[ケ]}$ のとき，$a+b+c$ は最大値 $\sqrt{[キ]}$ をとる．

コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

において，$x=y=z=1$ のとき

$(\mathbf{1}^2+\mathbf{1}^2+\mathbf{1}^2)(a^2+b^2+c^2)\geqq(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2=(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2=1$　より　$(a+b+c)^2\leqq\mathbf{3}$

ゆえに　$a+b+c\leqq\sqrt{3}$

等号成立は　$a:b:c=x:y:z=1:1:1$

つまり　$a=b=c$　のとき．これと　$a+b+c=\sqrt{3}$ より

$a=b=c=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$ のときである．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。